

РАЗДЕЛ I МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 621. 7. 011

Бровман М. Я.

О СИСТЕМАХ КООРДИНАТ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ АНАЛИЗЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Рассмотрена плоская деформация идеальной жесткопластической среды в криволинейных ортогональных координатах.

Методы решения уравнений пластичности рассмотрены в работах [1–3].

В работах [4, 5] использованы криволинейные ортогональные координаты с введением метрической функции.

Целью данной работы является рассмотрение особенностей выбора систем координат, в которых координатные линии являются линиями скольжения или линиями главных напряжений.

Получены решения, содержащие функции координат, определяемые метрическим тензором для двухмерного пространства.

Характеристики метрической функции. При анализе плоской деформации в ортогональных координатах α, β можно ввести метрическую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$, обеспечивающую выполнение уравнения связности согласно формулам:

$$\Phi_{\alpha} = -\frac{H_1\beta}{H_2}, \quad \Phi_{\beta} = \frac{H_2\alpha}{H_1}, \quad (1)$$

где H_1, H_2 – коэффициенты Ламе, см. [1, 4].

При этом см. [5]:

$$\sin \Phi = \frac{y_{\alpha}}{H_1} = -\frac{x_{\beta}}{H_2};$$

$$\cos \Phi = \frac{x_{\alpha}}{H_1} = -\frac{y_{\beta}}{H_2},$$

что следует из условия ортогональности координат и (1).

Угол Φ – это угол поворота прямой параллельной оси x при переходе к касательной линии α в данной точке O . Вектор скорости v является примером – проекции любого вектора преобразуются по формулам:

$$v_{\alpha} = v_x \cos \Phi + v_y \sin \Phi;$$

$$v_{\beta} = -v_x \sin \Phi + v_y \cos \Phi. \quad (2)$$

Если надо перейти от одной системы криволинейных координат α_1, β_1 к другой системе $\alpha_2(\alpha_1, \beta_1)$ и $\beta_2(\alpha_1, \beta_1)$, то получаем проекции вектора скорости в координатах α_2, β_2 :

$$v_{\alpha_2} = v_{\alpha_1} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + v_{\beta_1} \sin(\Phi_2 - \Phi_1);$$

$$v_{\beta_2} = -v_{\alpha_1} \sin(\Phi_2 - \Phi_1) + v_{\beta_1} \cos(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Переход от одной системы координат к другой в данной точке эквивалентен повороту локальных векторов на углы, равные разности метрических функций $(\Phi_2 - \Phi_1)$ для этих систем. Для декартовых координат можно принять $\Phi = const = 0$. Можно показать, что компоненты тензора напряжений в системах координат α_1, β_1 и α_2, β_2 связаны формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 2} &= \sigma_{\alpha 1} \cos^2(\Phi_2 - \Phi_1) + \sigma_{\beta 1} \sin^2(\Phi_2 - \Phi_1) - \tau_{\alpha_1 \beta_1} \sin[2(\Phi_2 - \Phi_1)]; \\ \sigma_{\beta 2} &= \sigma_{\alpha 1} \sin^2(\Phi_2 - \Phi_1) + \sigma_{\beta 1} \cos^2(\Phi_2 - \Phi_1) + \tau_{\alpha_1 \beta_1} \sin[2(\Phi_2 - \Phi_1)]; \\ \tau_{\alpha_2 \beta_2} &= \tau_{\alpha_1 \beta_1} \cos[2(\Phi_2 - \Phi_1)] + 0,5(\sigma_{\alpha 1} - \sigma_{\beta 1}) \sin[2(\Phi_2 - \Phi_1)].\end{aligned}\quad (3)$$

Аналогично для компонента тензора скорости деформации получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha 2} &= \varepsilon_{\alpha 1} \cos^2(\Phi_2 - \Phi_1) + \varepsilon_{\beta 1} \sin^2(\Phi_2 - \Phi_1) + 0,5\gamma_{\alpha_1 \beta_1} \sin[2(\Phi_2 - \Phi_1)]; \\ \varepsilon_{\beta 2} &= \varepsilon_{\alpha 1} \sin^2(\Phi_2 - \Phi_1) + \varepsilon_{\beta 1} \cos^2(\Phi_2 - \Phi_1) - 0,5\gamma_{\alpha_1 \beta_1} \sin[2(\Phi_2 - \Phi_1)]; \\ \gamma_{\alpha_2 \beta_2} &= \gamma_{\alpha_1 \beta_1} \cos[2(\Phi_2 - \Phi_1)] + 0,5(\varepsilon_{\beta 1} - \varepsilon_{\alpha 1}) \sin[2(\Phi_2 - \Phi_1)].\end{aligned}$$

Для перехода от декартовых координат к криволинейным надо в этих формулах принять $\Phi_1 = 0$. Компоненты тензора в декартовых координатах:

$$\varepsilon_x = \nu_{x,x}; \quad \varepsilon_y = \nu_{y,y}; \quad \gamma_{xy} = \nu_{x,y} + \nu_{y,x},$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ соответствуют растяжению вдоль осей x, y ; а γ_{xy} – сдвигу. Если ν_x и ν_y – величины постоянные, то реализуется движение без деформации:

$$\nu_{\alpha,\alpha} = \nu_{\beta}\Phi_{,\alpha}; \quad \nu_{\alpha,\beta} = \nu_{\beta}\Phi_{,\beta}; \quad \nu_{\beta,\alpha} = -\nu_{\alpha}\Phi_{,\alpha}; \quad \nu_{\beta,\beta} = -\nu_{\alpha}\Phi_{,\beta}.$$

Формулы (2) совпадают с обычными формулами линейного ортогонального преобразования, матрица которого равна:

$$\begin{vmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{vmatrix},$$

см. работу [6], но в данном случае угол Φ не является постоянным. Преобразования ортогональных координат образуют группу по сложению с единичным преобразованием $\Phi = 0$, но параметр группы Φ различный в разных точках.

Если нам известно статически допустимое поле напряжений в какой-либо системе координат α_1, β_1 с метрической функцией Φ_1 , но желательно определить такую систему в которой $\tau_{\alpha_2 \beta_2} = \pm k$, то определить функцию Φ_2 можно, приняв в формулах (3) $\sigma_{\alpha 2} = \sigma_{\beta 2}$. При этом определяем функцию:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \Phi_1 + 0,5 \operatorname{arctg} \left[\frac{(\sigma_{\alpha_1} - \sigma_{\beta_1})}{2\tau_{\alpha_1 \beta_1}} \right]; \\ \tau_{\alpha_2 \beta_2} &= 0,5 \sqrt{(\sigma_{\alpha_1} - \sigma_{\beta_1})^2 + 4\tau_{\alpha_1 \beta_1}^2} = \pm k.\end{aligned}$$

Если мы захотим найти функцию Φ_2 соответствующую преобразованию системы α_1, β_1 в такую систему α_2, β_2 которая имела бы в качестве координатных линий главных напряжений то в формулах (3) следует принять $\tau_{\alpha_2 \beta_2} = 0$, что определяет функцию Φ_2 .

Как показано в [4], два семейства ортогональных линий α и β могут быть линиями скольжения только в том случае, если метрическая функция этой системы координат удовлетворяет линейному уравнению:

$$\Phi_{\alpha,\beta} = 0, \quad (4)$$

и следовательно может быть представлена в виде:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad (5)$$

где $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ – дифференцируемые функции координат α и β .

При этом система напряжений:

$$\tau_{\alpha\beta} = \pm k, \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = C_1 + 2k[\pm \varphi(\alpha) \mp \psi(\beta)] \quad (6)$$

удовлетворяет уравнениям равновесия и условию текучести.

В формуле (6) k – предел текучести при сдвиге, а C_1 – произвольная постоянная.

Условие несжимаемости можно обеспечить, введя, как обычно, функцию тока F согласно формулам:

$$v_\alpha = \frac{1}{H_2} F_{,\beta}; v_\beta = -\frac{1}{H_1} F_{,\alpha}.$$

В результате расчетов определяем компоненты тензора скорости деформации:

$$\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta = 0,5 \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{F_{,\beta}}{H_2^2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{F_{,\alpha}}{H_1^2} \right) \right]; \quad (7)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{F_{,\beta}}{H_1 H_2} \right) - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{F_{,\alpha}}{H_1 H_2} \right). \quad (8)$$

Если данные кривые α, β являются линиями скольжения, то помимо (4) должно быть выполнено и условие $\varepsilon_\alpha = 0$, что дает из формулы (7) уравнение для определения функции тока и скоростей.

Иногда для практических задач могут быть полезными решения, при которых $\tau_{\alpha\beta} = 0$; а $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ – главные напряжения.

В этом случае уравнению (4) должна удовлетворять, см. [7], функция $\Phi(\alpha, \beta) = \ln(H_1 H_2)$ и, следовательно:

$$H_1 H_2 = \varphi_1(\alpha) \psi_1(\beta),$$

где $\varphi_1(\alpha)$ и $\psi_1(\beta)$ – дифференцируемые функции α и β .

При этом напряжения равны:

$$\sigma_\alpha = C_1 \pm 2k \ln \left[\frac{\psi_1(\beta)}{H_2} \right], \quad \sigma_\beta = C_1 \pm 2k \left\{ \ln \left[\frac{H_1}{\varphi_1(\alpha)} \right] - 1 \right\},$$

а функция тока определяется из уравнения $\gamma_{\alpha\beta} = 0$, (с применением формулы (8)).

Известно, что сумма двух, статически допустимых, систем напряжений условию текучести ввиду нелинейности, не удовлетворяет.

Но уравнение (4) линейное поэтому сумма решений (4) (или произведение некоторого решения Φ на постоянную) также является решением (4).

Различным системам координат может соответствовать одна метрическая функция.

Например, для полярных координат [4]:

$$x = \alpha \cos \beta; \quad y = \alpha \sin \beta; \quad H_1 = 1; \quad H_2 = \alpha; \quad \Phi = \beta.$$

Но эту же метрическую функцию имеет и система координат:

$$x = \alpha \cos \beta + \sin \beta; \quad y = \alpha \sin \beta - \cos \beta + 0,5 \ln \left| \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta} \right|,$$

для которой $H_1 = 1, H_2 = \alpha - \text{ctg} \beta$.

Поскольку уравнение (4) выполнено, эти линии могут быть линиями скольжения при напряжениях (6), когда $\varphi(\alpha) = 0; \psi(\beta) = \beta$.

Линии скольжения показаны на рис. 1, где у координатных α линий показаны индексами величины β (в градусах), а у β линий величины $\alpha = 5; 7,5; 10; 12,5$ и 15 .

Одно из семейств координатных линий – прямые, у которых имеется огибающая с уравнением $y(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|$.

Их можно использовать для анализа процесса прессования через криволинейную матрицу при напряжениях трения на поверхности (огibaющей линии) равных k .

Ось симметрии может быть расположена на прямой O_1O_2 , которую линии скольжения пересекают в A под углами 45° .

На рис. 2 показан пример использования такого, статически допустимого, поля напряжений для задачи о вдавливании штампа $ABCB'A'$. Участок дуги AB соответствует огibaющей характеристик, а в ADE – характеристики прямые, проходящие через точку A , как обычно в таких задачах см. [1–2].

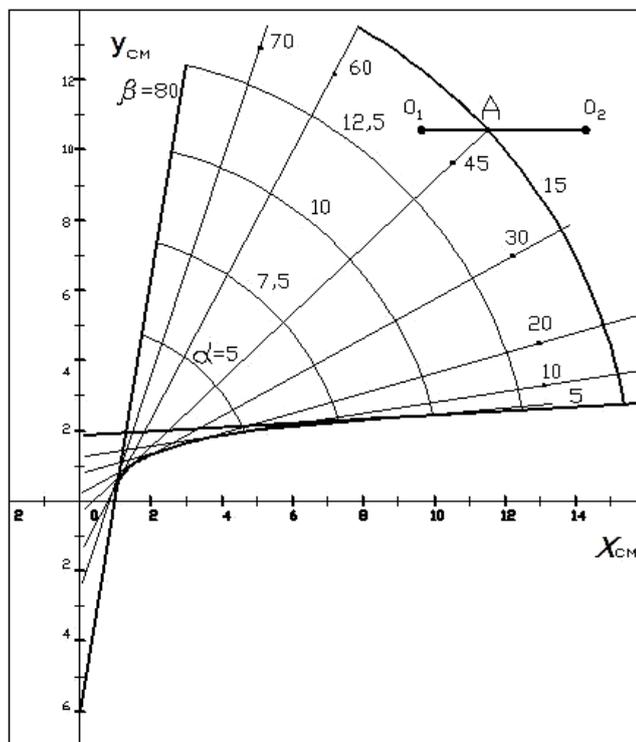


Рис. 1. Линии скольжения

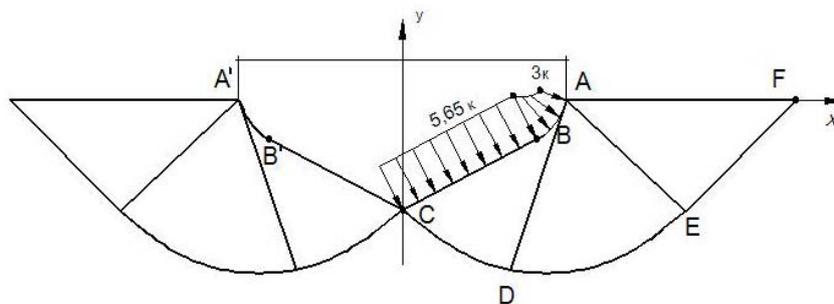


Рис. 2. Пример использования статически допустимого поля напряжений для задачи о вдавливании штампа $ABCB'A'$

Аналогичные линии скольжения строят обычно численными методами, но можно получить напряжения и в виде простых формул, в данной задаче:

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = C_1 - 2k\beta, \tau_{\alpha\beta} = k.$$

На рис. 2 приведено распределение давления на поверхности штампа.

Ниже линии CDE материал остается жестким. Поскольку линии BC и $B'C$ составляют углы $\pm 30^\circ$ с осью x , то вблизи точки C угол в жесткой зоне является острым и в него нельзя продолжить непрерывное поле напряжений, но можно построить разрывное поле с линией разрыва вдоль оси y [3, 7].

Криволинейные координаты определяются заданием двух функций: $x(\alpha, \beta)$ и $y(\alpha, \beta)$ (или $\alpha(x, y)$; $\beta(x, y)$).

Если задана только одна функция $\Phi(\alpha, \beta)$, то она криволинейных координат не определяет, (выше было показано, что одной функции Φ могут соответствовать различные координаты). Но если $\Phi(\alpha, \beta)$ удовлетворяет уравнению (4) и может быть представлена в виде (5), то существует система напряжений (6) удовлетворяющих условию текучести и уравнениям равновесия.

Зная функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$, можно определить коэффициенты Ламе, а по ним и координаты x, y .

Получены простые формулы:

$$H_1 = \varphi_{,\alpha}(\alpha) \exp\left[\frac{\varphi(\alpha)}{m} - m\psi(\beta)\right];$$

$$H_2 = m\psi_{,\beta} \exp\left[\frac{\varphi(\alpha)}{m} - m\psi(\beta)\right],$$

где m – постоянная, обеспечивающая выполнение уравнений (1) при любых дифференцируемых функциях $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$.

При этом декартовы координаты можно также выразить в виде функций от $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$:

$$x(\alpha, \beta) = \frac{m}{m^2 + 1} \exp\left[\frac{\varphi(\alpha)}{m} - m\psi(\beta)\right] [\cos(\varphi + \psi) + m \sin(\varphi + \psi)];$$

$$y(\alpha, \beta) = \frac{m}{m^2 + 1} \exp\left[\frac{\varphi(\alpha)}{m} - m\psi(\beta)\right] [\sin(\varphi + \psi) - m \cos(\varphi + \psi)];$$
(9)

Аналогично можно получить и решение при $\tau_{\alpha\beta} = 0$, а функции $\varphi_1(\alpha)$ и $\psi_1(\beta)$, входящие в формулы $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ определены функциями $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$:

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_{,\alpha}(\alpha) \exp\left[\frac{2\varphi(\alpha)}{m}\right];$$

$$\psi_1(\beta) = m\psi_{,\beta}(\beta) \exp[-2m\psi(\beta)];$$
(10)

Например, при $\varphi(\alpha) = \alpha$ и $\psi(\beta) = \beta$, $m = 1$ получаем из (10) функции:

$$\varphi_1(\alpha) = \exp(2\alpha), \quad \psi_1(\beta) = \exp(-2\beta).$$

И поэтому координаты x, y определены формулами:

$$x = 0,5\sqrt{2} \exp(\alpha - \beta) \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$y = 0,5\sqrt{2} \exp(\alpha - \beta) \sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4}\right),$$

при коэффициентах Ламе $H_1 = H_2 = \exp(\alpha - \beta)$.

В координатах (9) легко получить и решение для скоростей, соответствующее напряжениям (6). Если принять за линии тока координатные линии β , то $v_\alpha = F, \beta = 0$ и формула (7) при $\varepsilon_\alpha = 0$ определяет:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{F_{,\alpha}}{\varphi_{,\alpha}^2} \exp\left[\frac{-2\varphi(\alpha)}{m}\right] \right] = 0 \quad F_{,\alpha} = C_0 \varphi_{,\alpha}^2(\alpha) \exp\left[\frac{2\varphi(\alpha)}{m}\right];$$

$$v_{\beta} = C_0 \varphi_{,\alpha}^2(\alpha) \exp\left[\frac{\varphi(\alpha)}{m} + m\psi(\beta)\right],$$

где C_0 – величина постоянная. Аналогично, можно построить поле скоростей при $v_{\beta} = 0, v_{\alpha} \neq 0$. Примем в формулах (6) и (9) $\varphi(\alpha) = \sin \alpha, \psi(\beta) = \sin \beta, m = 1$ и получим уравнения координатных линий:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2} \exp(\sin \alpha - \sin \beta) \cos\left(\sin \alpha + \sin \beta - \frac{\pi}{4}\right)};$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2} \exp(\sin \alpha - \sin \beta) \sin\left(\sin \alpha + \sin \beta - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Поскольку функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ в данном случае ограничены $-1 \leq \sin \alpha \leq +1, -1 \leq \sin \beta \leq +1$, то два семейства кривых α, β образуют криволинейный четырехугольник, представленный на рис. 3.

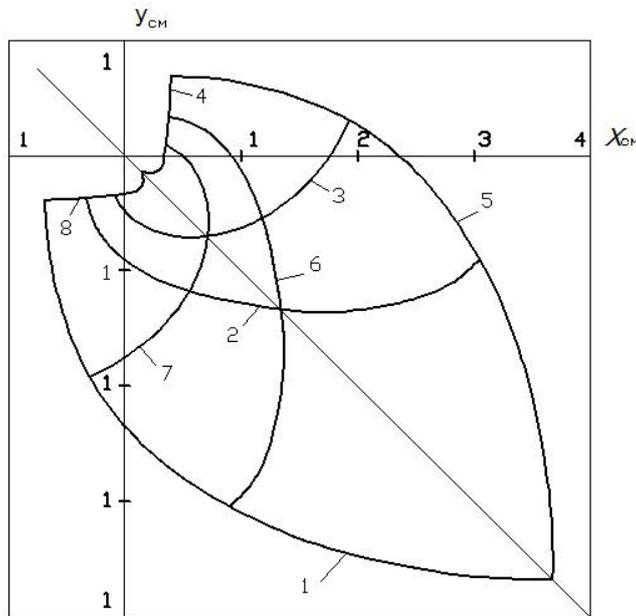


Рис. 3. Семейство кривых α, β в случае ограничения функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ $-1 \leq \sin \alpha \leq +1; -1 \leq \sin \beta \leq +1$

Здесь показаны α линии 1, 2, 3 и 4, на которых $\beta = \text{const} = -1,57; \beta = -0,526; \beta = 0$ и $\beta = +1,57$ соответственно.

Цифрами 5, 6, 7 и 8 на рис. 3 обозначены β линии, на которых $\alpha = +1,57; 0,526; 0$ и $-1,57$ соответственно.

Формулы (6) определяют решение в напряжениях. Линии скольжения, представленные на рис. 3, симметричны относительно прямой $y = -x$.

Приняв $\varphi(\alpha) = \ln|\cos(\alpha + 2)|, \psi(\beta) = -\ln|\cos(\beta + 2)|, m = 1$, получаем координаты:

$$x = \cos(\alpha + 2) \cos(\beta + 2) \cos\left\{\ln\left|\frac{\cos(\alpha + 2)}{\cos(\beta + 2)} - \frac{\pi}{4}\right|\right\};$$

$$y = \cos(\alpha + 2) \cos(\beta + 2) \sin\left\{\ln\left|\frac{\cos(\alpha + 2)}{\cos(\beta + 2)} - \frac{\pi}{4}\right|\right\}.$$

Это поле линий скольжения показано на рис. 4, где на линиях $\alpha = 1, 2, 3$ величины $\beta = \text{const} = 0; \beta = 0,316$ и $\beta = 1$ соответственно. На линиях $\beta: 4, 5$ и 6 величины $\alpha = 0; \alpha = 0,316$ и $\alpha = 1$.

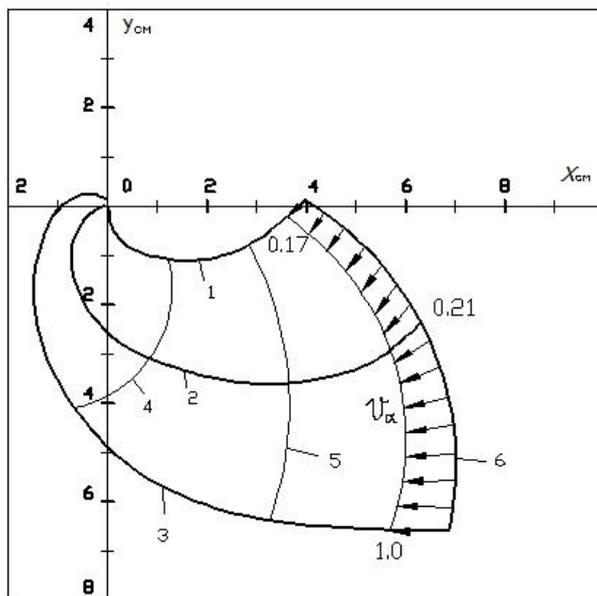


Рис. 4. Семейство кривых α, β в случае $\varphi(\alpha) = \ln|\cos(\alpha + 2)|, \psi(\beta) = -\ln|\cos(\beta + 2)|, m = 1$

На линии 6 построена эпюра скоростей $v_\alpha (v_\beta = 0)$, характеризующая их неравномерность по толщине.

Поскольку функции \sin и \cos периодические, то различным величинам α, β соответствуют одни и те же линии скольжения, например линии 2: $\beta = 0,316$ и $\beta = 2$ поскольку $\cos 2,316 = \cos 4,0$. Можно ввести координаты, содержащие неизвестные функции, например, $x = f(\alpha)\cos[f_1(\beta)], y = f(\alpha)\sin[f_1(\beta)]$, для которых:

$$\Phi(\beta) = f_1(\beta); H_1 = f_{,\alpha}(\alpha); H_2 = f(\alpha)\Phi_{,\beta}(\beta). \tag{11}$$

Хотя координатные линии известны: при $\alpha = \text{const}$ – это окружности $x^2 + y^2 = \text{const}$; а при $\beta = \text{const}; \frac{y}{x} = \text{const}$ – прямые линии, но метрика не определена пока не заданы функции $f(\alpha)$ и $f_1(\beta)$.

Но по формулам [4] можно получить решение. Если на некоторой линии $\alpha = \text{const} = \alpha_0$ задано напряжение $\sigma_\alpha(\alpha_0) = p$, то можно это краевое условие удовлетворить, приняв $\Phi(\beta) = 0,5 \arcsin\left\{\frac{1}{k}[p(\beta) - C_1]\right\}$, что допустимо при $\frac{1}{k}[p(\beta) - C_1] \leq 1$. Если задано краевое условие для скорости на линии α_0 , где $v_\alpha(\alpha_0) = v_0(\beta)$, то можно выбрать функцию $\Phi(\beta)$, обеспечивающую удовлетворение этого условия $\Phi(\beta) = 0,5 \arcsin\left\{C_0[f(\alpha_0)v_0]\right\}^{-1}$, где C_0 – постоянная.

Получив решение, в котором имеется функция $f(\alpha)$, можно в некоторых случаях выбрать эту функцию так, чтобы обеспечить выполнение краевых условий.

Рассмотрим симметричную деформацию при течении к точке $x = y = 0$. Из условия $\tau_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} = 0$, используя (8), легко определить функцию тока $F = C_0\Phi(\beta)$, и скорости $v_\alpha = \frac{C_0}{f(\alpha)}, v_\beta = 0$.

Далее можно, (при $\Phi(\beta) = \beta$), определить напряжения, удовлетворяющие уравнением движения (4), (более общим, чем уравнения равновесия).

Так если заданы краевые условия на линии $\alpha = \text{const} = \alpha_0$, $\sigma_\alpha(\alpha_0) = p$, $v_\alpha(\alpha_0) = \text{const} = v_0$, то получим:

$$\sigma_\alpha = p \pm 2k \ln \left[\frac{f(\alpha_0)}{f(\alpha)} \right] + 0,5 \rho v_0^2 \left[1 - \frac{f^2(\alpha_0)}{f^2(\alpha)} \right]; \quad \sigma_\beta = \sigma_\alpha \pm 2k; \quad \tau_{\alpha\beta} = 0;$$

$$v_\alpha = v_0 \frac{f(\alpha_0)}{f(\alpha)}, \quad v_\beta = 0, \quad (12)$$

где $\rho = \text{const}$ – плотность материала.

Уравнения пластичности выполнены при любой дифференцируемой функции $f(\alpha)$. При $f(\alpha) = \alpha$ и ($\Phi(\beta) = \beta$) получим обычное решение для осесимметричной деформации [1, 2], но в общем случае решение существенно зависит от выбора этих функций. Примем, например, функции:

$$f(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha^n}, \quad \Phi(\beta) = \beta, \quad (13)$$

где α_k и n – постоянные.

Элементы компонент малого вектора ds при этом равны:

$$ds_\alpha = H_1 d\alpha = \left[1 - (\alpha_k/\alpha)^{n+1} \right] d\alpha;$$

$$ds_\beta = H_2 d\beta = \alpha \left[1 + \frac{1}{n} (\alpha_k/\alpha)^{n+1} \right] d\beta, \quad (14)$$

а напряжение σ_α и скорость v_α :

$$\sigma_\alpha = p \pm 2k \ln \left[\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha_0^n} \right) \left(\alpha + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha^n} \right)^{-1} \right] +$$

$$+ 0,5 \rho v_0^2 \left[1 - \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha_0^n} \right) \left(\alpha + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha^n} \right)^{-2} \right]; \quad (15)$$

$$v_\alpha = v_0 \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha_0^n} \right) \left(\alpha + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha^n} \right)^{-1}.$$

В этом решении предельной является величина $\alpha = \alpha_k$, при которой $dS_\alpha = 0$.

Если в обычном решении «сток» несжимаемого материала происходит в точке $\alpha = 0$ (где $v_\alpha \rightarrow \infty$), то в данном решении «сток» происходит не в особой точке $\alpha = 0$, а на «особой линии» $\alpha = \alpha_k$, где скорость является величиной конечной $v_\alpha(\alpha_k) = v_0 \frac{n\alpha_0}{\alpha_k(n+1)} \left(1 + \frac{\alpha_k^n}{n\alpha_0^n} \right)$,

а расход материала по окружности $\alpha_k = \text{const}$, (как и по другим линиям α) равен

$$Q = 0 \int v_\alpha dS_\beta = 2\pi v_0 \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_k^{n+1}}{n\alpha_0^{n+1}} \right). \quad \text{При метрике, определяемой формулами (13) и (14),}$$

зона $\alpha < \alpha_k$ является «недоступной».

Поскольку решение зависит только от переменной α , а следуя (13), минимальное значение расстояния до точки $x = y = 0$ равно $f(\alpha_k) = 2\alpha_k$; оно достигается при минимуме функции $f(\alpha)$, который имеет место, когда переменная α достигает критического значения $\alpha = \alpha_k$. При $\alpha < \alpha_k$ решения (15) при функции $f(\alpha)$ согласно (13) нет, – это зона неопределенной метрики, (можно ввести в этой зоне другую метрику). Если задать на некоторой линии α_1 величину $\sigma_\alpha = p_1$, то из (15) легко получить соотношение между p и p_1 .

Предельная величина будет иметь место при $\alpha_1 = \alpha_k$.

Можно принять $p = 0$ и получить при $\alpha = \alpha_k$ в формуле (12) напряжение σ_α , с которым зона неопределенной метрики (ЗНМ) «втягивает» деформируемый материал.

Можно проследить, как изменяется координата $\alpha(\tau)$, (где τ – время). Например, при $n = 1$:

$$dS_\alpha/d\tau = v_\alpha; \quad d\alpha/d\tau = v_0 \alpha / \left(1 + \frac{\alpha_k^2}{\alpha_0^2} \right) \left[1 - \left(\frac{\alpha_k}{\alpha} \right)^4 \right]^{-1};$$

и, если при $\tau = 0$, $\alpha = \alpha_0$, то получаем:

$$\alpha^2 + \frac{\alpha_k^4}{\alpha^2} = \alpha_0^2 + \frac{\alpha_k^4}{\alpha_0^2} - 2\alpha_0 v_0 \left(1 + \frac{\alpha_k^2}{\alpha_0^2} \right) \tau.$$

Несжимаемый материал, имеющий при $\tau = 0$ координату α_0 , достигнет предельной величины α_k и границы ЗНМ за конечное время, равное:

$$\tau_k = \alpha_0 / 2v_0 \left(1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_0^2} \right) \left(1 + \frac{\alpha_k^2}{\alpha_0^2} \right)^{-1}.$$

Если $\alpha_k = 0$, то решение соответствует обычным полярным координатам и за время $\tau_{k0} = \alpha_0 / 2v_0$ материал достигнет особой точки $\alpha = 0$.

Описание движения в направлении границы ЗНМ с учетом гравитации будет дано в отдельной работе.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены особенности выбора систем координат, применяемые при анализе процессов обработки металлов давлением. В некоторых задачах можно получать решения, содержащие неизвестные функции координат, определяемые только после выбора метрических свойств данного пространства и коэффициентов Ламе.

Выбор этих функций иногда упрощает выполнение краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. школа, 1969. – 608 с.
2. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 231 с.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехтеориздат, 1956. – 407 с.
4. Бровман М. Я. О решении уравнений пластического течения в криволинейных координатах / М. Я. Бровман // Известия РАН. – МТТ. – 2004. – № 4. – С. 86–97.
5. Бровман М. Я. О решении уравнений пластического течения при осесимметричной деформации / М. Я. Бровман // Известия РАН. – МТТ. – 2007. – № 2. – С. 149–158.
6. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / М. Я. Бровман. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
7. Бровман М. Я. Применение теории пластичности в прокатке / Бровман М. Я. – М. : Металлургия, 1991. – 265 с.

Бровман М. Я. – д-р техн. наук, г. Тверь, Россия.

E-mail: brovman@mail.ru